Unidad I: Sistemas lineales discretos y continuos

Objetivo específico: Entender ampliamente el fenómeno del comportamiento de los modelos matemáticos para la resolución de problemas enfocados a las ecuaciones lineales.

Conceptos a desarrollar: Dar al alumno las herramientas necesarias, para que pueda efectuar el análisis de los sistemas lineales discretos y continuos.

1.1 Modelos matemáticos[1]

En ciencias aplicadas, un modelo matemático es uno de los tipos de modelos científicos que emplea algún tipo de formulismo matemático para expresar relaciones, proposiciones sustantivas de hechos, variables, parámetros, entidades y relaciones entre variables y/o entidades u operaciones, para estudiar comportamientos de sistemas complejos ante situaciones difíciles de observar en la realidad. El término modelización matemática es utilizado también en diseño gráfico cuando se habla de modelos geométricos de los objetos en dos (2D) o tres dimensiones (3D).

El significado de modelo matemático en filosofía de las matemáticas y fundamentos de las matemáticas es, sin embargo, algo diferente. En concreto en esas áreas se trabajan con "modelos formales". Un modelo formal para una cierta teoría matemática es un conjunto sobre el que se han definido un conjunto de relaciones unarias, binarias y trinarias, que satisface las proposiciones derivadas del conjunto de axiomas de la teoría. La rama de la matemática que se encarga de estudiar sistemáticamente las propiedades de los modelos es la teoría de modelos.

Es importante mencionar que un modelo matemático no es completamente exacto con problemas de la vida real, de hecho, se trata de una idealización. Hay una gran cantidad de funciones que representan relaciones observadas en el mundo real; las cuales se analizarán en los párrafos siguientes, tanto algebraicamente como gráficamente.

Clasificación de los modelos

Se podría decir que un modelo de las ciencias físicas es una traducción de la realidad física de un sistema físico en términos matemáticos, es decir, una forma de representar cada uno de los tipos entidades que intervienen en un cierto proceso físico mediante objetos matemáticos. Las relaciones matemáticas formales entre los objetos del modelo, deben representar de alguna manera las relaciones reales existentes entre las diferentes entidades o aspectos del sistema u objeto real. Así una vez "traducido" o "representado" cierto problema en forma de modelo matemático, se pueden aplicar el cálculo, el álgebra y otras herramientas matemáticas para deducir el comportamiento del sistema bajo estudio. Un modelo físico requerirá por tanto que se pueda seguir el camino inverso al modelado, permitiendo reinterpretar en la realidad las predicciones del modelo.

Según la información de entrada

Con respecto a la función del origen de la información utilizada para construir los modelos pueden clasificarse de otras formas. Podemos distinguir entre modelos heurísticos y modelos empíricos:

Modelos heurísticos (del griego euriskein 'hallar, inventar'). Son los que están basados en las explicaciones sobre las causas o mecanismos naturales que dan lugar al fenómeno estudiado.

Modelos empíricos (del griego empeirikos relativo a la 'experiencia'). Son los que utilizan las observaciones directas o los resultados de experimentos del fenómeno estudiado.

---

[1] Información obtenida del sitio de Internet Wikipedia Internacional.

Según el tipo de representación

Además los modelos matemáticos encuentran distintas denominaciones en sus diversas aplicaciones. Una posible clasificación puede atender a si pretenden hacer predicciones de tipo cualitativo o pretende cuantificar aspectos del sistema que se está modelizando:

- Modelos cualitativos o conceptuales, estos pueden usar figuras, gráficos o descripciones causales, en general se contentan con predecir si el estado del sistema irá en determinada dirección o si aumentará o disminuirá alguna magnitud, sin importar exactamente la magnitud concreta de la mayoría de aspectos.
- Modelos cuantitativos o numéricos, usan números para representar aspectos del sistema modelizado, y generalmente incluyen fórmulas y algoritmos matemáticos más o menos complejos que relacionan los valores numéricos. El cálculo con los mismos permite representar el proceso físico o los cambios cuantitativos del sistema modelado.

Según la aleatoriedad

Otra clasificación independiente de la anterior, según si a una entrada o situación inicial concreta pueden corresponder o no diversas salidas o resultados, en este caso los modelos se clasifican en:

- Determinista. Se conoce de manera puntual la forma del resultado ya que no hay incertidumbre. Además, los datos utilizados para alimentar el modelo son completamente conocidos y determinados.
- Estocástico. Probabilístico, que no se conoce el resultado esperado, sino su probabilidad y existe por tanto incertidumbre.

Clasificación según su aplicación u objetivo

Por su uso suelen utilizarse en las siguientes tres áreas, sin embargo existen muchas otras como la de finanzas, ciencias etc.

- Modelo de simulación o descriptivo, de situaciones medibles de manera precisa o aleatoria, por ejemplo con aspectos de programación lineal cuando es de manera precisa, y probabilística o heurística cuando es aleatorio. Este tipo de modelos pretende predecir qué sucede en una situación concreta dada.

- Modelo de optimización. Para determinar el punto exacto para resolver alguna problemática administrativa, de producción, o cualquier otra situación. Cuando la optimización es entera o no lineal, combinada, se refiere a modelos matemáticos poco predecibles, pero que pueden acoplarse a alguna alternativa existente y aproximada en su cuantificación. Este tipo de modelos requiere comparar diversas condiciones, casos o posibles valores de un parámetro y ver cual de ellos resulta óptimo según el criterio elegido.

- Modelo de control. Para saber con precisión como está algo en una organización, investigación, área de operación, etc. Este modelo pretende ayudar a decidir qué nuevas medidas, variables o qué parámetros deben ajustarse para lograr un resultado o estado concreto del sistema modelado.

Ejemplo:

Un modelo mixto operacional estadístico es una teoría o situación causal de hechos y expresado con símbolos de formato matemático. Por ejemplo las tablas de contingencia. De hecho los modelos matemáticos se construyen con varios niveles de significación y con diferentes variables.

Kendall y Buckland catalogan hasta 40 tipos diferentes de modelos matemáticos. Ejemplos: Rapoport en modelo matemático e interacción social en 1961 y Bugeda en Sociología matemática en 1970. Por un principio de isomorfismo hay una equivalencia, a conseguir, entre un modelo y una teoría. Además teoría y modelo son sinónimos.

Ejemplos de modelos por tipos:

	Descriptivos / Simulación		**Optimización / Elección**		**Control / Tratamiento**	
	Determinista	**Probabilista**	**Determinista**	**Probabilista**	**Determinista**	**Probabilista**
Cuantitativo / Numérico	Cálculos astronómicos	Simulaciones de tráfico	Cálculo componentes de sistemas	Diseño ingenieril	Control automático	?
Cualitativo / Conceptual	Análisis microeconómicos	Teoría de juegos	Modelos de grafo/flujo	?	Teoría psicológica	?

Modelo matemático de simulación hidrológica

Se utilizan para estudiar situaciones extremas, difícilmente observables en la realidad, como por ejemplo los efectos de precipitaciones muy intensas y prolongadas en cuencas hidrográficas, en su estado natural, o en las que se ha intervenido con obras como canales, represas, diques de contención, puentes, etc.

La cuenca hidrográfica es dividida en sub-cuencas consideradas homogéneas desde el punto de vista: del tipo de suelo, de la declividad, de su cobertura vegetal. El número y tipo de las variables hidrológicas que intervienen en el modelo son función de objetivo específico para el cual se elabora el mismo.

Fases de construcción de un modelo

En muchos casos la construcción o creación de modelos matemáticos útiles sigue una serie de fases bien determinadas:

- Identificación de un problema o situación compleja que necesita ser simulada, optimizada o controlada y por tanto requeriría un modelo matemático predictivo.
- Elección del tipo de modelo, esto requiere precisar qué tipo de respuesta u output pretende obtenerse, cuales son los datos de entrada o factores relevantes, y para qué pretende usarse el modelo. Esta elección debe ser suficientemente simple como para permitir un tratamiento matemático asequible con los recursos disponibles. Esta fase requiere además identificar el mayor número de datos fidedignos, rotular y clasificar las incógnitas (variables independientes y dependientes) y establecer consideraciones, físicas, químicas, geométricas, etc. que representen adecuadamente el fenómeno en estudio.

- Formalización del modelo en la que se detallarán qué forma tienen los datos de entrada, qué tipo de herramienta matemática se usará, como se adaptan a la información previa existente. También podría incluir la confección de algoritmos, ensamblaje de archivos informáticos, etc, etc. En esta fase posiblemente se introduzcan también simplificaciones suficientes para que el problema matemático de modelización sea tratable computacionalmente.
- Comparación de resultados los resultados obtenidos como predicciones necesitan ser comparados con los hechos observados para ver si el modelo está prediciendo bien. Si los resultados no se ajustan bien, frecuentemente se vuelve a la fase 1.
- Es importante mencionar que la inmensa mayoría de modelos matemáticos no son exactos y tienen un alto grado de idealización y simplificación, ya que una modelización muy exacta puede ser más complicada de tratar de una simplificación conveniente y por tanto menos útil. Es importante recordar que el mecanismo con que se desarrolla un modelo matemático repercute en el desarrollo de otras técnicas de conocimientos enfocadas al área sociocultural.

1.2 Sistemas[2]

Para comenzar a estudiar los sistemas, debemos primero considerar el concepto de señal.

Si bien es un término de muy amplio alcance, en el contexto que nos atañe consideramos como señal a toda variación de una cantidad física (por lo general con el tiempo) susceptible de ser representada matemáticamente y de la cual podemos obtener alguna información o realizar algún cambio.

Según su naturaleza podemos clasificar a las señales en dos grupos, a saber: las que pueden definirse en cada instante de un determinado intervalo, llamadas señales de tiempo continuo, y aquéllas que pueden representarse como una sucesión de de valores ordenados mediante un índice entero, llamadas señales de tiempo discreto. (El uso de la palabra "Tiempo" establecida por el uso alude a que la mayoría de las señales procesadas dependen del tiempo, sin ser éste el caso general).

Con esto, definiremos como sistema a cualquier ente físico o proceso capaz de recibir una señal, denominada de entrada, o excitación (x (t)), y transformarla en otra señal que denominaremos de salida o respuesta. (y (t))
Según la naturaleza de las señales que los sistemas procesan, usualmente se los clasifica también como “de tiempo continuo" o "de tiempo discreto".

Como puede apreciarse, las definiciones previas son de carácter muy general. Esto pone en evidencia una de las grandes ventajas de la teoría de señales y sistemas, esto es: puede aplicarse al estudio de una gran cantidad de problemas reales de muy diversa naturaleza física.

En este trabajo centraremos nuestra atención en un tipo particular de sistemas, denominados “Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo” o “SLTI”,

Nota: Si bien este trabajo está desarrollado en tiempo continuo, pueden hallarse relaciones totalmente análogas para los sistemas de tiempo discreto

Linealidad

Se dice que un sistema es lineal si cumple con el llamado principio de superposición, el cual a su vez se compone de dos partes:

---

[2] Información obtenida del sitio de Internet de la biblioteca internacional de Sevilla, España.

1. Homogeneidad:
$si\ \ x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow kx(t) \rightarrow ky(t)$ (1)
2. Aditividad:
$si\ \ x_1(t) \rightarrow y_1(t) \wedge x_2(t) \rightarrow y_2(t) \Rightarrow x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$

Combinando la (1) y la (2):

$k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) \Rightarrow k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$ (superposición)

Evidentemente, esto se cumplirá si el sistema, para obtener la salida, efectúa sobre la señal de entrada operaciones que son matemáticamente lineales, como ser: suma, multiplicación por una constante, diferenciación e integración.

A partir de esto es importante entender porqué las ecuaciones íntegro-diferenciales lineales son la herramienta apropiada para modelar matemáticamente la relación entrada-salida de este tipo de sistemas, ya que en ellas, en su forma general, intervienen todas las operaciones antedichas.

Invariabilidad Temporal

Decimos que un sistema es invariante en el tiempo, si la respuesta del mismo no depende del momento en que es excitado, formalmente:

$si\ \ x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0)$ (3)

Esta es una propiedad importante del sistema, puesto que lo hace más predecible y posibilita su análisis por medio de los métodos que estudiaremos mas adelante.

Físicamente, la invariabilidad temporal implica que los constituyentes de nuestro sistema, no se alterarán y conservarán sus propiedades con el paso del tiempo: "sus parámetros son constantes"

Por ejemplo, un circuito electrónico no sería invariante en el tiempo si sus componentes (resistencias, inductores, condensadores, etc...) cambiasen de valor, como sucede por degradación de los materiales que los componen, lo cual en general es un proceso lento.

Es importante señalar que la invariabilidad temporal del sistema establece que la ecuación diferencial lineal que lo define sea a coeficientes constantes, pues dichos coeficientes están definidos por los componentes físicos del sistema (resistencias, inductores, masas, resortes, amortiguadores, etc.).

Consecuencias Importantes

El hecho de que un sistema sea LTI, hará más manejable su análisis: puesto que es posible descomponer a una señal arbitraria en componentes más simples, hallar las respuestas del sistema a cada una de ellas, y luego, por el principio de superposición, sumar dichas respuestas para obtener la respuesta total a la entrada arbitraria (compuesta).

Esta forma de tratamiento, como se verá, sirve de base para varios métodos de análisis de SLTI, en particular:

1 La interpretación de una señal arbitraria como una suma de impulsos ponderados, es la base del método de convolución, que caracteriza al sistema en función de su respuesta impulsiva.

2 La representación de la señal de entrada como una suma de sinusoides armónicas ponderadas, conduce a las Series de Fourier.

3 La descomposición de una señal arbitraria en una suma de exponenciales complejas ponderadas, es una serie de Fourier de tipo exponencial y es la base para el estudio por medio de las transformadas de Fourier y de Laplace.

Método de Convolución

Ahora profundizaremos sobre el primero de los métodos de análisis de SLTI antes mencionados.

El método de convolución sirve para hallar la respuesta del sistema a una entrada arbitraria, conociendo previamente la respuesta impulsiva del mismo.

Llamamos repuesta impulsiva, h(t), a la respuesta del sistema cuando es excitado con la señal delta de Dirac o simplemente, impulso δ (t) (nos referiremos al impulso unitario, o sea de área = 1).

Ésta es una señal que posee amplitud infinita, duración infinitesimal y área finita.
Como puede deducirse de sus características, δ (t) es una señal meramente teórica y no reproducible en la práctica. Por lo tanto, debemos conformarnos con aproximarla mediante un pulso de una amplitud y duración determinados de manera tal que el error cometido esté dentro los márgenes aceptables para el caso.
Una de las propiedades más importantes del impulso es, como sabemos, la de muestreo de una señal, o selección del impulso. Esto es:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t)x(\tau).d\tau$$

Propiedad que puede verificarse fácilmente. Este tipo de integrales no se evalúa analíticamente por los métodos clásicos. Hay que ver que el producto en el integrando es, en definitiva, la δ (τ-t) con área (coeficiente) = x(t) ubicada en τ = t. Podemos sacar x(t) que actúa como coeficiente, de la integral que procede (se evalua) por τ.

Así: $x(t) = x(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-t)\, d\tau = x(t)$ dado que el área de δ (τ-t) =1

Aquí podemos ver cómo una señal cualquiera puede ser representada como una "suma" (considerando a la integral como el límite de una suma) de impulsos desplazados en el tiempo y ponderados por el valor de la señal en ese instante. Esto puede verse de una manera más gráfica en tiempo discreto, o bien, si lo consideramos como el límite de la aproximación de la señal por medio de pulsos rectangulares tomando en el intervalo una mayor cantidad de pulsos de menor duración.

Aquí esta la clave del método de convolución, a saber:

- Ya que podemos representar cualquier señal como una "suma" de impulsos ponderados; si excitamos un SLTI con una señal arbitraria x(t) es posible, gracias al principio de aditividad, determinar la salida analizando únicamente las respuestas a cada uno de los impulsos que la componen y luego sumarlas.

- Si bien es cierto que el proceso de encontrar las respuestas a todos los impulsos que componen x(t) podría parecer en principio un trabajo tedioso y quizás imposible (pues en tiempo continuo la señal está compuesta por infinitos impulsos) , puede solucionarse esto considerando que los impulsos que componen la señal difieren unos de otros únicamente en su posición temporal y su "ponderación" (determinada por la constante que los multiplica); así, podremos representarlos genéricamente como K δ (t-to) y ver que, haciendo uso de otras dos propiedades de los SLTI, la homogeneidad e invariancia en el tiempo, la respuesta a este impulso genérico será K h(t-to), donde h(t) es la respuesta al impulso unitario ubicado en el origen y constituye la incógnita real del problema, ya que K y to dependen de la señal de entrada.

En síntesis, si conocemos h(t) podremos obtener las respuestas de todos los impulsos que conforman x(t) y luego sumando dichas respuestas obtener la respuesta "completa" del sistema a x(t), o sea y(t).

Todo este proceso expresado matemáticamente nos permite llegar a la expresión general para obtener la respuesta y(t) de un SLTI, caracterizado por su respuesta impulsiva h(t), a una entrada x(t) dada.

Esta expresión es conocida como integral de convolución:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

1.3 Entrada y salida de un sistema

Las variables de estado son el subconjunto más pequeño de variables de un sistema que pueden representar su estado dinámico completo en un determinado instante. Estas variables de estado deben ser linealmente independientes; una variable de estado no puede ser una combinación lineal de otras variables de estado. El número mínimo de variables de estado necesarias para representar un sistema dado, n, es normalmente igual al orden de la ecuación diferencial que define al sistema. Si el sistema es representado en forma de función de transferencia, el número mínimo de variables de estado es igual al orden del denominador de la función transferencia después de haber sido reducido a una fracción propia. Cabe destacar que al convertir una representación de espacio de estado a la forma de función de transferencia puede perderse información interna sobre el sistema, pudiendo por ejemplo describir un sistema como estable aun cuando la representación de espacio de estado indica que es inestable en ciertos puntos.

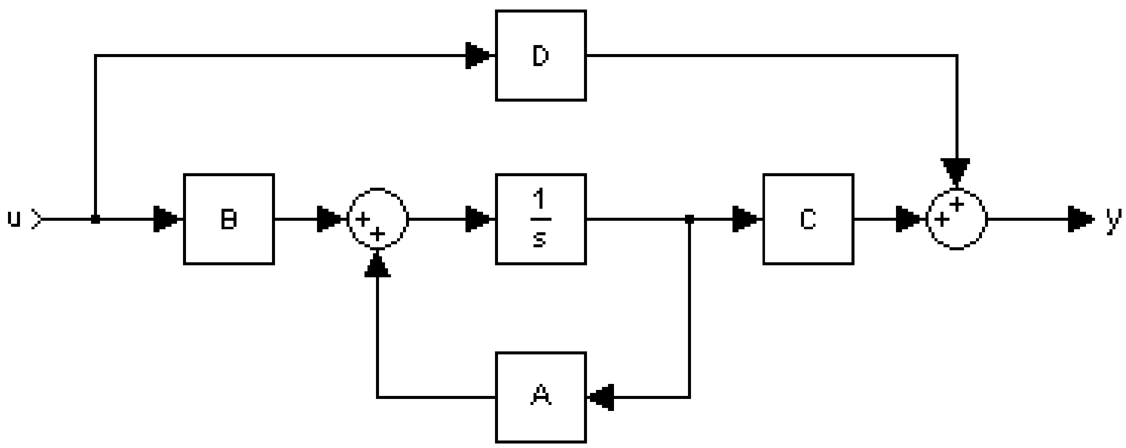

Figura 1.3.1.- Modelo de espacio de entrada-salida, de estado típico.

Una forma general de representación de espacios de estado de un sistema lineal con p entradas, q salidas y n variables de estado se escribe de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = C(t)\mathbf{x}(t) + D(t)\mathbf{u}(t)$$

Donde:

$x(t) \in \mathbb{R}^n$; $y(t) \in \mathbb{R}^q$; $u(t) \in \mathbb{R}^p$;
$\dim[A(\cdot)] = n \times n$,
$\dim[B(\cdot)] = n \times p$,
$\dim[C(\cdot)] = q \times n$,
$\dim[D(\cdot)] = q \times p$,
$\dot{\mathbf{x}}(t) := \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$.

$x(\cdot)$es llamado vector de estados, $y(\cdot)$es llamado vector de salida, $u(\cdot)$es llamado vector de entradas (o control), $A(\cdot)$es la matriz de estados, $B(\cdot)$es la matriz de entrada, $C(\cdot)$es la matriz de salida, y $D(\cdot)$es la matriz de transmisión directa. Por simplicidad, $D(\cdot)$normalmente se toma como la matriz cero, p. ej.: se elige que el sistema no tenga transmisión. Nótese que en esta formulación general se supone que todas las matrices son variantes en el tiempo, p. ej.: algunos o todos sus elementos pueden depender del tiempo. La variable temporal $t$puede ser una "continua" (p. ej.: $t \in \mathbb{R}$) o una discreta (p. ej.:$t \in \mathbb{Z}$): en éste último caso la variable temporal es generalmente indicada como k. Dependiendo de las consideraciones tomadas, la representación del modelo de espacios de estado puede tomar las siguientes formas:

Tipo de sistema	Modelo de espacio de estados
continuo e invariante en el tiempo	$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$ $\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)$
continuo y variante en el tiempo	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$ $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$
Discreto e invariante en el tiempo	$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k)$ $\mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) + D\mathbf{u}(k)$
Discreto y variante en el tiempo	$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k)$ $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k)$
Transformada de Laplace de continua e invariante en el tiempo	$s\mathbf{X}(s) = A\mathbf{X}(s) + B\mathbf{U}(s)$ $\mathbf{Y}(s) = C\mathbf{X}(s) + D\mathbf{U}(s)$
Transformada Z de discreta e invariante en el tiempo	$z\mathbf{X}(z) = A\mathbf{X}(z) + B\mathbf{U}(z)$ $\mathbf{Y}(z) = C\mathbf{X}(z) + D\mathbf{U}(z)$

Figura 1.3.2.- Tabla de tipos de sistemas.

La estabilidad y la respuesta natural característica de un sistema puede ser estudiado mediante los autovalores (o valores propios) de la matriz A. La estabilidad de un modelo de espacio de estados invariante en el tiempo puede ser fácilmente determinado observando la función transferencia del sistema en forma factorizada. Tendría una forma parecida a la siguiente:

$$\mathbf{G}(s) = k\frac{(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)(s-p_4)}$$

El denominador de la función transferencia es igual al polinomio característico encontrado tomando el determinante de $sI - A$,

$$\lambda(s) = |sI - A|.$$

Las raíces de este polinomio (los autovalores) proporcionan los polos en la función transferencia del sistema. Dichos polos pueden ser utilizados para analizar si el sistema es asintótica o marginalmente estable. Otra alternativa para determinar la estabilidad, en la cual no involucra los cálculos de los autovalores, es analizar la estabilidad de Liapunov del sistema. Los ceros encontrados en el numerador de $\mathbf{G}(s)$ puede usarse de manera similar para determinar si el sistema posee una fase mínima.

El sistema podría ser estable con respecto a sus entradas y salidas aún si es internamente inestable. Este podría ser el caso si polos inestables son cancelados por ceros.

Controlabilidad

La condición de controlabilidad de estados implica que es posible, mediante entradas admisibles, dirigir los estados desde cualquier valor inicial a cualquier valor final dentro de un intervalo de tiempo. Un modelo de espacio de estados continuo e invariante en el tiempo es controlable si y sólo si

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & ... & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

Observabilidad

La observabilidad es la medida de cuán correctamente los estados internos de un sistema pueden ser inferidos conociendo las salidas externas. La observadlidad y la controlabilidad son matemáticamente duales.

Un modelo de espacio de estados continuo e invariante en el tiempo es observable si y sólo si:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ ... \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

(El rango de una matriz es el número de filas linealmente independientes.)

Función de transferencia

La función de transferencia de un modelo de espacio de estados continuo e invariante en el tiempo puede ser obtenida de la siguiente manera:

Tomando la transformada de Laplace de

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$

Tenemos que;

$$s\mathbf{X}(s) = A\mathbf{X}(s) + B\mathbf{U}(s)$$

Luego, agrupamos y despejamos $\mathbf{X}(s)$, dando

$$(s\mathbf{I} - A)\mathbf{X}(s) = B\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - A)^{-1}B\mathbf{U}(s)$$

esto es sustituido por $\mathbf{X}(s)$en la ecuación de salida

$\mathbf{Y}(s) = C\mathbf{X}(s) + D\mathbf{U}(s)$, nos queda

$$\mathbf{Y}(s) = C((s\mathbf{I} - A)^{-1}B\mathbf{U}(s)) + D\mathbf{U}(s)$$

Como la función de transferencia está definida como la tasa de salida sobre la entrada de un sistema, tomamos

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{Y}(s)/\mathbf{U}(s)$$

y sustituimos las expresiones previas por $\mathbf{Y}(s)$con respecto a $\mathbf{U}(s)$, quedando

$$\mathbf{G}(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + D$$

Claramente $\mathbf{G}(s)$debe tener $q$por $p$dimensiones, así como un total de qpelementos. Entonces para cada entrada hay $q$funciones de transferencias con uno por cada salida. Esta es la razón por la cual la representación de espacios de estados puede fácilmente ser la elección preferida para sistemas de múltiples entradas, múltiples salidas (MIMO, por sus siglas en inglés: Multiple-Input, Multiple-Output).